Übungsaufgaben Analytische Geometrie 12 m2 /14.5.2009

1. Die drei Geraden g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -17 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$, g_b: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und g_c: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

   definieren ein Dreieck.

   a) Gib die Koordinaten der drei Eckpunkte an!

   $g_a \cap g_b = C(4|2|1)$ $\quad g_a \cap g_c = B(2|0|-8)$ $\quad g_b \cap g_c = A(-1|0|2)$

   b) Bestimme die Länge der Seite c = AB!

   $$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 0 + 10^2} = 10{,}44$$

   c) Berechne die Winkel mit Hilfe der Skalarprodukte!

   cos(α)=0,437 $\qquad$ cos(β) = -0,8528 $\qquad$ cos(γ)= 0,0967

   α = 64,08° $\qquad$ β =180°-148,52=31,48° $\qquad$ γ = 84,45°

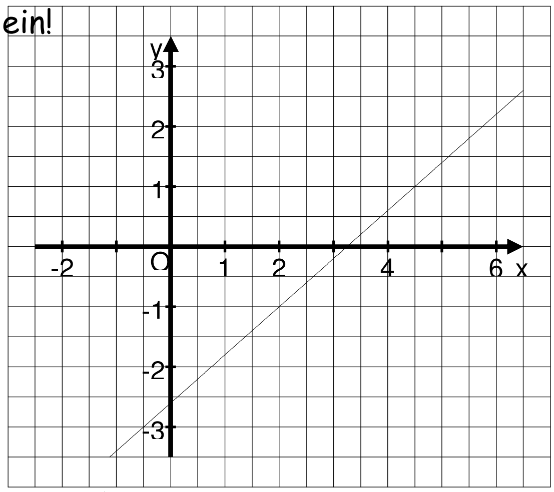
   d) Gib die Gleichung einer Geraden an, die durch den Punkt P(3|2|2) und parallel zu g_a verläuft.

   g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ (oder ähnlich…)

---

2. Gegeben sind g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ und der Punkt P(3|2)

   a) Zeichne Gerade und Punkt in ein KO-System ein!



   b) Stelle die Geradengleichung in der Form y = mx +b auf!

   y= 0,8 x -2,6

   c) Berechne den Fußpunkt Q des Lotes von P auf die Gerade g !

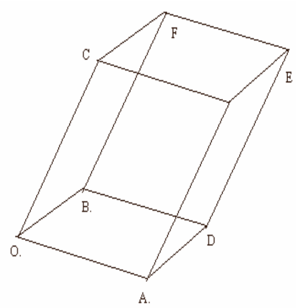
   $Q(\frac{167}{41} | \frac{27}{41})$

   d) Berechne den Abstand des Punktes P von der Geraden g

   d = 1,7179

---

3. Gegeben sind die Punkte A(3|2|2), B(0|0|2), C(-1|3|5), Durch den Koordinatenursprung O und die Punkte A, B und C wird ein Spat (gegenüber liegende Seiten sind parallel) definiert (vgl. Skizze)



   a) Bestimme die Koordinaten der Punkte D, E, F und G

   D(3|2|4) $\qquad$ E(2|5|9) $\qquad$ F(-1|3|7) $\qquad$ G(2|5|7)

b) Berechne die Länge der Raumdiagonalen DC!

$$\left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{18}$$

c) Berechne den Schnittpunkt der Diagonalen OD und AB

Schnittpunkt S(1,5|1|2)

---

4. Gegeben ist die Ebene E: -2x + y - 4z = 6 und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ ½ \end{pmatrix}$

a) Stelle die Ebene in Parameterform dar!

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder ähnlich …

b) Wo schneidet die Gerade g die Ebene E ?

S(3|8|-1)

c) Unter welchem Winkel schneiden sich Gerade und Ebene?

α = 18,95°

---

5. Geg. sind E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ und E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) Berechne die Gleichung der Schnittgeraden in Parameterform!

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen? (Anleitung: Berechne den Normalenvektor für jede Ebene und ermittele dann den Schnittwinkel der Normalenvektoren!)

cos(α) = 0,9806 $\qquad$ α = 11,3°

---

6. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bestimme a so, dass die Vektoren einen Winkel von 58,41186° einschließen!

a = -4